

Cours 16 (Exercices)

Rappel

A : anneau.

Soit $f: M \longrightarrow N$ morphisme de A -mod.

Si $\varphi: M' \xrightarrow{\sim} M$ isom.

$\psi: N' \xrightarrow{\sim} N$ isom.

on considère

$$M' \xrightarrow{f'} N'$$

défini par

$$f' = \underline{\psi \circ f \circ \varphi}$$

Alors

$$\begin{cases} \ker(f) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \ker(f') \\ \operatorname{Im}(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(f') \\ \operatorname{Coker}(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(f') \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow \parallel & \curvearrowright & \uparrow \parallel \psi \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

Rappel V: $K[X]$ -module de type fini

i.e. V est un K -e.v. muni d'un endom. f .
On suppose que $\dim_K V < \infty$

Thm du cours $\Rightarrow$ on a un isom. de $K[X]$ mod.

$$\begin{array}{c} V \\ \uparrow \\ f \end{array} \cong \begin{array}{c} K[X] \\ \downarrow \\ X \end{array} \begin{array}{c} (P_1) \\ \downarrow \\ X \end{array} \oplus \dots \oplus \begin{array}{c} K[X] \\ \downarrow \\ X \end{array} \begin{array}{c} (P_m) \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{i.e.} \\ V \\ \downarrow f \end{array} \cong \begin{array}{c} K[X] \\ \downarrow X \end{array} \begin{array}{c} (P_1) \\ \downarrow X \end{array} \oplus \dots \oplus \begin{array}{c} K[X] \\ \downarrow X \end{array} \begin{array}{c} (P_m) \\ \downarrow X \end{array}$$

Cor $\exists$ une base de V sous laquelle
la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \boxed{M_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{M_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{M_m} \end{pmatrix}$$

où M_i est la matrice companion de P_i .

En particulier

si $K = \mathbb{C}$ (ou $K = \overline{K}$)

alors on peut supposer que $P_i = (X - \lambda_i)^{v_i}$
pour certain $\begin{cases} \lambda_i \in K \\ v_i \geq 1 \end{cases}$

Ex 190 $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Le module $V = \mathbb{C}^2$ muni de la structure de $\mathbb{C}[X]$ -module suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X] \times V &\longrightarrow V \\ (z, v) &\longmapsto z \cdot v \\ (X, v) &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

• Thm $\Rightarrow V \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}[X] / (X - \lambda_i)^{v_i}$ pour $\lambda_i \in \mathbb{C}$
 $v_i \geq 1$
comme $\mathbb{C}[X]$ -module

$\Rightarrow V$ admet une base f

la matrice de f est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \\ & & & \square \\ & & & & \square \end{pmatrix}$ forme de Jordan

$f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ la forme de Jordan de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

car $\text{Sp}(f) = \{2, 1\}$
 $\nwarrow \nearrow$
 sans multiplicités.

$\xRightarrow{\text{Thm}}$ $V \xleftarrow{\cong} \frac{\mathbb{C}[X]}{(X-2)} \oplus \frac{\mathbb{C}[X]}{(X-1)}$

$\cong \frac{\mathbb{C}[X]}{(X-1)(X-2)}$

Lemme de Choïnois

$\Rightarrow \frac{\mathbb{C}[X]}{(X-1)(X-2)}$ est engendré par $\bar{1}$

(En générale A/I est un A -module cyclique / monogène, engendré par $\bar{1}$)

$\Rightarrow V$ est engendré par $\varphi(\bar{1})$

i.e. cyclique comme $\mathbb{C}[X]$ -module.

Exemple.

$$\mathbb{C}[X]/(X) \oplus \mathbb{C}[X]/(X)$$

n'est pas cyclique

$$\mathbb{C}[X]/(X^2) \text{ est cyclique}$$

$$\mathbb{C}[X]/(X^3) \oplus \mathbb{C}[X]/(X^3) \text{ cyclique}$$

$$\cdot \quad \mathbb{C}[x]/(x^3) \oplus \mathbb{C}[x]/(x^5) \text{ pas cyclique}$$

$$\cdot \quad \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \neq \mathbb{Z}/4 \text{ n'est pas cyclique}$$

$$\circ \quad \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/9 \cong \mathbb{Z}/36 \text{ cyclique}$$